

Evaluación multicriterio basada en una función de preferencia y objetos representativos de categorías: un nuevo método que considera información imprecisa e incierta

Multi-criteria evaluation based on a preference function and representative objects of their classes: a new method that models imprecise and uncertain information



Recuperado de: <http://evaluacionydesarrollo.com/analisis-multicriterio/>

Eduardo René Fernández González¹
eduardo.fernandez@uadec.edu.mx

Jorge Adalberto Navarro Castillo²
jnavarro@uas.edu.mx

María de la Luz Medina Gracia¹
María_medina_gracia@uadec.edu.mx

Nadia Elizabeth Moya Fernández¹
nadiamoyafernandez@uadec.edu.mx

¹ Facultad de Contaduría y Administración, Unidad Torreón
Universidad Autónoma de Coahuila
Blvd, Revolución Oriente 151
Ciudad Universitaria, Torreón, Coahuila, C.P. 27000

² Facultad de Informática
Universidad Autónoma de Sinaloa
Josefa Ortiz de Domínguez s/n
Ciudad Universitaria, Culiacán, Sinaloa C.P. 80040

RESUMEN:

Se presenta un método para clasificar objetos caracterizados por múltiples criterios en categorías evaluativas. Como los objetos a clasificar pueden ser de cualquier naturaleza, este método modela uno de los procesos de pensamiento más universales y cotidianos, con enorme presencia en la administración y dirección. El método se basa en un modelo de preferencias multi-criterio del tipo función de valor aditiva, que tiene como caso particular la simple función suma ponderada. El modelo propuesto permite evaluaciones imprecisas de los atributos o indicadores del objeto, y de los factores de ponderación que expresan su importancia. Se requiere que quien encara el problema de decisión caracterice las categorías evaluativas mediante objetos representativos de ellas, lo que constituye un conjunto de referencia que expresa conocimiento y preferencias. Una vez creado, el modelo puede aplicarse como una *máquina de evaluación* para clasificar numerosos objetos, para reemplazar al decisor humano, o para evaluar casos aislados de especial dificultad.

Palabras clave: Decisión multi-criterio; evaluación; función de preferencia; números de intervalos.

ABSTRACT

This paper presents a new method to classify objects described by multiple criteria into one class of a set of ordered evaluation categories. Since the objects to be classified may be of very general kinds, this method is a model of one of the most universal and ubiquitous mind processes. The approach is based on a linear value function preference model, from which the weighted-sum function is an important particular case. The model is able to handle imprecise attribute weights and scores. The decision-maker should characterize the evaluation categories through representative objects. These objects are a reference set, which, combined with the attribute weights, express knowledge and preferences from the decision-maker. Once the model has been created, it may be used as an "evaluation machine". This is useful to make assignments of many objects to

categories, to replace the decision-maker in solving similar problems, or to classify a few objects with severe conflict of its attributes.

Key words: Multi-criteria decision; ordinal classification; value function; interval numbers.

1. Introducción

La realidad es compleja y para analizarla se debe descomponer en sus diferentes dimensiones. Su multi-dimensionalidad, unida con las limitaciones cognitivas de la mente humana, hace difícil tomar apropiadas decisiones en muchos problemas del mundo real. El análisis multi-criterio de la decisión está compuesto por un conjunto de métodos analíticos que ayudan a manejar la complejidad multi-dimensional de los objetos de la realidad, y de las acciones humanas. En buena medida por la sofisticación matemática de estos métodos, en México son raras sus aplicaciones en la gestión empresarial, de las organizaciones gubernamentales y de la sociedad civil.

Evaluar es consustancial al pensamiento. No existe dirección ni control separada de procesos de evaluación. Al evaluar se asigna un *valor*, una *categoría de valor*, o un *orden*, a los objetos o acciones bajo análisis. La asignación de una categoría es un proceso de clasificación. Este artículo se enfoca quizás en la rama más importante de la evaluación multi-criterio: la clasificación ordinal. En lenguaje natural, el verbo *clasificar* alude a la acción de asignar objetos de cierto universo a una categoría o clase de un conjunto predefinido de ellas. Como los objetos a clasificar pueden ser de cualquier naturaleza, la clasificación es uno de los procesos de pensamiento más universales y cotidianos, con enorme presencia en la administración y gestión.

Hay dos tipos de procesos de clasificación: en la clasificación nominal (por ejemplo, *esta flor es roja*), la categoría pre-existente *roja* alude simplemente a

un nombre y carece de orden. En este trabajo nos interesa la clasificación ordinal (por ejemplo, *este proyecto es muy bueno o esta micro-empresa tiene poca capacidad de sobrevivir*), en la que las categorías *muy bueno, bueno, aceptable, inaceptable o alta, media, poca, muy poca capacidad de sobrevivir*, están ordenadas según cierto criterio preferencial que emana innatamente de un decisor (generalmente humano), al que en adelante se llamará, sin distinción de género, *Decision Maker (DM)*.

Mientras que la clasificación nominal se concreta a partir de la similitud entre el objeto y el prototipo de la clase, la clasificación ordinal es básicamente un juicio preferencial del DM. Este juicio se hace sobre objetos que, salvo casos más bien triviales, se caracterizan por varios o muchos criterios de valoración que usualmente están en conflicto, (por ejemplo, *la idea de este proyecto es buena pero consume muchos recursos y el responsable no está suficientemente calificado*). Por tanto, este artículo se enfoca en clasificación ordinal multi-criterio, un tipo muy importante de la evaluación multi-criterio.

Los criterios o atributos del objeto son dimensiones de valoración, que deben ser integradas para emitir una clasificación o evaluación. Es obvio que a medida que aumenta la cantidad de criterios también se incrementa la dificultad del proceso cognitivo que lleva a la evaluación. En el proceso mental de evaluar, el DM *compara preferencialmente* al objeto contra ciertos representantes de la categoría, y decide. Obviamente, con más de unos pocos criterios de evaluación, las limitaciones cognitivas de la mente humana impiden juicios confiables, y se requiere la ayuda de un modelo matemático que integre las preferencias y auxilie al DM en la toma de mejores decisiones.

Por la generalidad de sus aplicaciones (por ejemplo, análisis de la salud financiera de empresas, de la resiliencia de PyMEs, evaluación de modelos de negocios, de arquitectura de empresas, de la deuda soberana de países, de la idoneidad de productos, stocks financieros, proveedores, aspirantes a ocupar

puestos de dirección, proyectos de investigación, programas educativos, estrategias de solución de problemas, evaluación de competitividad, y muchas más), es quizás la clasificación ordinal multi-criterio el área en que más puede apoyar la modelación económico-matemática en la gestión y dirección de organizaciones, tanto empresariales como del sector público.

La estructura de este trabajo es la siguiente: En la Sección 2 se describe el planteamiento formal del problema. A continuación se establece un posicionamiento respecto a la literatura de clasificación ordinal multi-criterio. La Sección 4 describe el modelo de preferencias multi-criterio que se empleará. De inmediato, la Sección 5 presenta el método de clasificación; la discusión de sus aspectos más importantes, incluyendo los pasos requeridos para construir una *máquina de evaluación multi-criterio* se describe en la Sección 6. Finalmente se presentan breves conclusiones.

2. Planteamiento del problema

Sea O un objeto cualquiera de la realidad, caracterizado por N atributos $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, cada uno de ellos expresando cierta dimensión evaluativa o punto de vista valorativo de O . En adelante se denota por a_i el estado del i -ésimo atributo del objeto, de modo que O puede representarse por (a_1, a_2, \dots, a_N) . Se supone también que existe un conjunto finito de categorías $C = \{C_1, C_2, \dots, C_M\}$, que cumplen dos condiciones: i) estar diseñadas para clasificar a objetos con los atributos de O , (aunque en diferente estado), de acuerdo con las necesidades del DM en el específico problema de decisión que encara; e ii) estar ordenadas en el sentido de una cierta deseable propiedad ρ , es decir, si $i > j$ entonces los objetos en C_i son mejores que los que pertenecen a C_j respecto a la propiedad ρ .

No hay restricciones a ρ , salvo la de ser una característica deseable cuyo nivel diferencia a las categorías evaluativas. Tampoco hay restricciones a O , excepto admitir que el nivel que alcanza en la propiedad ρ depende del estado de sus atributos (a_1, a_2, \dots, a_N) .

Dada una propiedad ρ y un conjunto de categorías C , resolver el problema de clasificación ordinal multi-criterio es hacer corresponder a cada objeto O de un universo de interés una y sólo una categoría del conjunto C . Esa correspondencia puede establecerse en forma holística a partir de procesos mentales, o apoyarse en un modelo matemático que integre las preferencias, creencias, prioridades, actitudes del DM respecto a ρ y su relación con el estado de los atributos de O . La forma holística está severamente restringida por las limitaciones cognitivas de la mente humana enunciadas en forma pionera por Miller (1956); muchos decisores humanos encuentran difícil realizar decisiones consistentes en presencia de unos pocos atributos en conflicto, y son ampliamente sobrepasados por la complejidad multidimensional del mundo real. Note sin embargo que no es posible decidir sobre el nivel de ρ para un objeto determinado sin tomar en cuenta las preferencias, prioridades, creencias, todos elementos de la subjetividad del DM. En presencia de múltiples criterios o en condiciones de incertidumbre y riesgo, la mejor decisión depende de la subjetividad del DM. Y esto no es en modo alguno ajeno a la concepción científica del mundo. Es sólo que la ciencia de la decisión debe ser capaz de modelar los aspectos de la subjetividad del decisor que sean relevantes al problema.

Desde el punto de vista computacional y de los sistemas de apoyo a la toma de decisiones, el problema ha de ser concebido como:

Desarrollar una máquina de decisión que a cada descripción (a_1, a_2, \dots, a_N) de los objetos de interés le asocie una categoría del conjunto C , acorde con los diferentes elementos que integran la subjetividad del DM.

3. Análisis de la literatura

La literatura científica reporta numerosos métodos de ayuda a la clasificación en presencia de múltiples criterios. Desde el punto de vista del modelo matemático subyacente, casi todos los métodos corresponden a una de las siguientes categorías:

- Los que se basan en la construcción de una función de valor que expresa las preferencias del DM (el paradigma funcional) (e.g., Jacquet-Lagrèze, 1995; Zopounidis y Doumpos, 2000; Köksalan y Ulu, 2003; Köksalan y Özpeynirci, 2009; Bugdaci y col., 2013);
- Los métodos simbólicos que se conectan con la Inteligencia Artificial (e.g., Greco y col., 2001; Błaszczyszki y col., 2007; Dembczyński y col., 2009);
- Los métodos que se basan en la construcción de relaciones binarias asociadas a preferencia (outranking) (el paradigma relacional) (e.g., Massaglia y Ostanello, 1991; Yu, 1992; Perny, 1998; Belacel, 2000; Tervonen y col., 2009; Almeida-Dias y col., 2010; Fernandez y Navarro, 2011; Bouyssou y Marchant, 2015).
- Los que se basan en el aprendizaje por ejemplos; a partir de éstos se crea el modelo (puede ser estadístico, de redes neuronales, de Machine Learning), que permite clasificar nuevos objetos (e.g. Doumpos y Zopounidis, 2002; Kelleher y col., 2015).

Cualquiera sea el modelo de decisión subyacente, las clases tienen que ser caracterizadas de alguna forma. Hay dos modos principales:

- i) A través de objetos de frontera, cuya función es precisamente describir la frontera que separa cada pareja de clases adyacentes (e.g., Roy y Bouyssou, 1993; Perny, 1998; Araz y Ozkarahan, 2007; Nemery y Lamboray, 2008; Ishizaka y col., 2012; Bouyssou y Marchant, 2015; Fernández y col., 2017, Bouyssou y col., 2020);
- ii) Por medio de ejemplos de decisión (u objetos de referencia) cuya clasificación se conoce o es posible conocer (e.g., Jacquet-Lagrèze, 1995; Zopounidis y Doumpos, 2000; Greco y col., 2001; Köksalan y Ulu, 2003; Nemery y Lamboray, 2008; Fernandez y col., 2008, 2009; Köksalan y Özpeynirci, 2009; Köksalan y col., 2009; Almeida-Dias y col., 2010, 2012; Fernandez y Navarro, 2011; Bugdaci y col., 2013; Izhizaka y Nemery, 2014; Kadzinski y col., 2015; Fernández y col., 2020).

La creación del conjunto de referencia (con objetos de referencia clasificados) es un aspecto crucial. Respecto al punto ii), a veces el DM dispone de numerosos ejemplos clasificados (seguramente a través de bases de información); empleando esos ejemplos el modelo se *entrena* (como en redes neuronales), o se *ajusta* como en el método UTADIS (Jacquet- Lagrèze, 1995), o como en la reciente propuesta de Fernández y col. (2019a). Pero con mayor frecuencia el DM no dispone de suficientes datos como para entrenar o ajustar el modelo; entonces, el propio DM debe evaluar algunos objetos de referencia, y utilizarlos para describir la frontera entre clases, o alternativamente, las propias categorías de que los objetos son representantes. Algunos métodos emplean solamente un objeto *central* o *representativo* de su clase (e.g., Nemery y Lamboray, 2008; Almeida-Dias y col., 2010; Ishizaka y Nemery, 2014). Otros utilizan información de varios objetos representativos en cada clase (e.g., Almeida-Dias y col., 2012, Fernández y col., 2020).

Los métodos que describen las fronteras entre clases adyacentes (punto i) tienen pros y contras. Por una parte, puede que un solo objeto que describa fielmente la frontera asociada sea suficiente en problemas con solamente dos categorías,

mientras que el paradigma ii) puede requerir, para lograr igual precisión, varios objetos en cada clase. Por otra parte, para el DM es mucho más fácil clasificar objetos representativos que objetos en la frontera. Más aun, la propia existencia de objetos en la frontera no está garantizada en todo problema del mundo real, sobre todo en aquéllos donde los criterios de evaluación sólo toman valores discretos.

De los métodos que se apoyan en modelos de decisión multi-criterio, los más populares son UTADIS (UTilités Additives DIScriminantes) y los que pertenecen a la familia ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la Realité).

Los métodos ELECTRE se basan en relaciones de *no inferioridad* (*outranking*). El más popular es quizás ELECTRE TRI-B (*B* alude a *boundary*) propuesto originalmente por Yu (1992) y sistematizado por Roy y Bouyssou (1993). ELECTRE TRI-B trabaja con solamente la información de un objeto en cada frontera. Para lograr una mejor caracterización de la frontera, Fernández y col. (2017) propusieron ELECTRE TRI-nB, en el que la misma puede describirse por varios objetos. Muy recientemente, ELECTRE TRI-nB fue extendido al ambiente de intervalos en INTERCLASS-nB (Fernández y col., 2020). Este método utiliza intervalos para reflejar la imprecisión en los valores de los criterios y de los parámetros del modelo de *no inferioridad*.

ELECTRE TRI-B, sus variantes, y otros métodos que basan la clasificación en comparación con objetos en la frontera han sido criticados por Bouyssou y Marchant (2015) y Bouyssou y col. (2020) desde un profundo punto de vista teórico. Estos autores señalan que los métodos mencionados carecen de simetría respecto la operación de transposición. Ella consiste en invertir la dirección de preferencia en todos los criterios, y simultáneamente invertir el ordenamiento de las categorías. Según Bouyssou y Marchant (2015), las conclusiones que se obtengan después de la operación de transposición no deben diferir de las originales. Puesto que la información obtenida de x es *mejor*

que el objeto frontera b tiene el mismo valor que la obtenida de el objeto frontera b es mejor que x , se debe integrar toda la información para clasificar al objeto x . Entonces, si un método tiene su *imagen* equivalente a través de la operación de transposición, ambos (el original y su imagen) deben emplearse conjuntamente para evaluar los objetos.

Otros métodos de la familia ELECTRE (o conexos) se apoyan en objetos representativos de sus clases (e.g., Almeida-Dias y col., 2010, 2012; Ishizaka y Nemery, 2014). ELECTRE TRI-C y ELECTRE TRI-nC (C alude a central o característica; n se refiere a varios objetos) se deben a Almeida-Dias y col. (2010, 2012). Recientemente, ELECTRE TRI-nC fue extendido al ambiente de intervalos por Fernández y col. (2020). Hay que señalar que todos estos métodos (TRI-C, TRI-nC e INTERCLASS-nC) se apoyan en dos reglas de decisión que son simétricas respecto a la operación de transposición, y que se utilizan conjuntamente.

Cuando sistematizaron ELECTRE TRI-B, Roy y Bouyssou (1993) propusieron un grupo de requerimientos estructurales (ciertas propiedades de consistencia), que con el correr de los años se convirtieron en paradigmáticas. Empleando lenguaje natural exento de formalismo matemático, se mencionan aquí sólo las de más difícil cumplimiento:

Conformidad: cada objeto de referencia debe ser clasificado por el método en la misma categoría a que pertenece.

Monotonía: Si en la comparación de un par de objetos (x,y) , x es mejor que y en uno o varios atributos, y no es peor en ninguno de los restantes, entonces x tiene que ser clasificado por el método en una clase al menos tan buena como lo es aquella en que fue evaluado y .

Estabilidad: Esta propiedad describe qué debe suceder con la clasificación de objetos cuando las clases se dividen o se combinan. Prescindiendo del formalismo matemático, suponga que el DM decide unir dos clases (por ejemplo, las categorías *buena* y *aceptable* en *suficientemente buena*). Si un objeto se clasificaba antes de la unión en la categoría *aceptable* debe ser clasificado en la clase *suficientemente buena*. Otra cosa sería inconsistente. Viceversa: si la clase *suficientemente buena* es separada en *buena* y *aceptable*, los objetos que previamente se evaluaban como *suficientemente buenos*, después de la división deberán ser clasificados como *buenos*, o como *aceptables*.

Las propiedades expresan una racionalidad simple, aunque poderosa. Su incumplimiento puede considerarse una seria limitación. Hay que subrayar que ELECTRE TRI-nB, INTERCLASS-nB, ELECTRE TRI-C, ELECTRE TRI-nC, INTERCLASS-nC, ElectreSort (Ishizaka y Nemery, 2014) cumplen con estas propiedades de consistencia. Los demás y numerosos métodos de clasificación ordinal multi-criterio no cumplen (o no analizan el cumplimiento de) las mismas. Los métodos ELECTRE y sus variantes son apropiados para manejar problemas de decisión con preferencias no-compensatorias, situaciones de veto, incomparabilidad de alternativas e intransitividad de preferencias (Figueira y col., 2013). Cuando estas características no se presentan, un modelo compensatorio basado en la construcción de funciones de preferencia puede ser más apropiado. Los modelos que suponen aditividad de las contribuciones de los criterios y ponderación de las mismas son mucho más populares que los sofisticados ELECTRE entre los decisores del campo administrativo, generalmente cómodos con la linealidad de los modelos matemáticos, y la ponderación de factores o criterios de evaluación. Las decisiones se basan en funciones de preferencia (funciones de valor), en las que comportamientos relativamente pobres de ciertos criterios se pueden compensar alcanzando altos estándares en otros.

UTADIS (Jacquet- Lagrèze, 1995) se basa en un modelo de función de valor aditiva

$$V = \sum w_i v_i(a_i)$$

Donde: a_i denota el estado del i -ésimo atributo

v_i denota funciones de preferencia unidimensional que el método supone lineales

por tramo

w_i es la ponderación del criterio i -ésimo.

A partir de numerosos ejemplos de entrenamiento, UTADIS ajusta, (minimizando las inconsistencias con el conjunto de entrenamiento), la forma de las funciones de preferencia y la ponderación para reflejar mejor la información de esos ejemplos. UTADIS sólo es aplicable cuando se dispone de copiosa información de referencia.

Jacquet- Lagrèze (1995) y los múltiples trabajos que emplean UTADIS (e.g., Doumpos y Zopounidis, 2002) no analizan el cumplimiento del paradigma racional que Roy y Bouyssou (1993) establecieron. En opinión de los autores del presente trabajo, la minimización de las inconsistencias no asegura la conformidad. Tampoco parece que se pueda garantizar la estabilidad ante la unión de categorías. Algo similar sucede con MHDIS (Zopounidis y Doumpos, 2000) y otros métodos de clasificación ordinal que emplean funciones de preferencia.

Esta revisión de los antecedentes demuestra que no existe un método basado en el paradigma funcional que trabaje con solamente uno o pocos objetos caracterizando fronteras o clases. Y esto sucede a pesar de que el modelo de decisión a partir de una función de valor tiene características de transparencia, simplicidad, transitividad y comparabilidad que lo hacen atractivo para un amplio rango de DMs, entre ellos la mayoría de los administradores y dirigentes empresariales. Constatar esto abre una ventana de oportunidad para un nuevo proyecto.

En resumen, los métodos reportados en la literatura manifiestan las siguientes limitaciones:

Primero, a los efectos de propiciar su uso frecuente por mandos medios y superiores de empresas y organizaciones del sector público:

- La gran mayoría se basa en modelos matemáticos complicados, que provocan rechazo en los DMs del mundo empresarial y público.
- Los métodos para los que existen herramientas de software, (que en ciertos casos pueden ser amigables para el DM), requieren copiosa información para ser ajustados o entrenados apropiadamente.

Segundo, por consideraciones puramente teóricas (pero importantes para el avance del conocimiento):

- Muchos métodos no satisfacen las propiedades de consistencia propuestas por Roy y Bouyssou (1993), y carecen de simetría respecto a la operación de transposición.

4. Modelo de preferencias

Los atributos del objeto se convierten en criterios a través de introducir una escala de medición; ella puede ser continua o discreta, cuantitativa o cualitativa. Sin pérdida de generalidad, se supone que al estado a_i del atributo A_i se le puede asociar un número f_i de tal forma que sea creciente con la preferencia. Es decir $f_i(a_i) > f_i(b_i)$ significa que el DM prefiere el estado a_i al b_i .

Como ya se expresó, el modelo de preferencias es un aspecto esencial. Se parte de la premisa de que el DM se siente cómodo con un modelo del tipo

$$V = \sum w_i v_i(f_i)$$

Donde:

V es una función de valor, que expresa sus preferencias integradas sobre múltiples atributos;

$v_i(f_i)$ expresa su preferencia respecto al nivel f_i ;

w_i representa la ponderación que el DM asigna al atributo i -ésimo.

Sin embargo, un modelo así tiene dos inconvenientes principales: a) la imprecisión en la asignación de los “pesos” w_i ; b) la imprecisión en v_i y en la evaluación f_i , para los distintos valores del índice “ i ”.

Entre varias formas que la modelación matemática propone para modelar la imprecisión, aquí se empleará quizás la más simple: los números de intervalo, introducidos por Moore. Un número de intervalo modela una magnitud cuyo valor preciso se desconoce, pero que cae en un intervalo cerrado que sí es conocido. Así, un número de intervalo es un rango $E = [\underline{E}, \overline{E}]$, donde \underline{E} denota su límite inferior y \overline{E} el superior. En adelante, fuentes en negrita cursiva representan números de intervalo. Los números reales son un caso particular en el que $\underline{E} = \overline{E}$.

Algunas operaciones aritméticas con números de intervalo son las siguientes (ver Moore, 1979):

$$D + E = [\underline{D} + \underline{E}, \overline{D} + \overline{E}],$$

$$D - E = [\underline{D} - \overline{E}, \overline{D} - \underline{E}],$$

$$D \times E = [\min\{\underline{D}\underline{E}, \underline{D}\overline{E}, \overline{D}\underline{E}, \overline{D}\overline{E}\}, \max\{\underline{D}\underline{E}, \underline{D}\overline{E}, \overline{D}\underline{E}, \overline{D}\overline{E}\}]$$

Shi y col. (2005) introdujeron la función Posibilidad:

$$P(E \geq D) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_{ED} > 1, \\ p_{ED} & \text{si } 0 \leq p_{ED} \leq 1, \\ 0 & \text{si } p_{ED} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde $E = [e^-, e^+]$ y $D = [d^-, d^+]$ son números de intervalo, y $p_{ED} = \frac{e^+ - d^-}{(e^+ - e^-) + (d^+ - d^-)}$

Fernández y col. (2019b) interpretan esta función como el grado de credibilidad de que una instancia del número E sea mayor que otra de D .

Con la función de posibilidad se puede definir una relación de orden transitiva.

Se prueba que $E > D \Leftrightarrow P(E \geq D) > 0.5$, y $E=D \Leftrightarrow P(E \geq D) = 0.5 = P(D \geq E)$.

El modelo de preferencias multi-criterio será el de una función de valor de intervalo:

$$V(x) = \sum w_i v_i(f_i) \quad (2)$$

Donde:

f_i : número de intervalo que representa la evaluación imprecisa del i -ésimo criterio asociado con el objeto x ;

w_i : número de intervalo que refleja el "peso" impreciso del i -ésimo atributo;

v_i : función de preferencia unidimensional asociada con el i -ésimo atributo; su imagen es un intervalo.

Cuando se emplea la misma escala para evaluar los atributos, (2) puede tomar su más simple forma lineal:

$$V(x) = \sum w_i f_i \quad (3)$$

Si w y f fueran números reales, el modelo de la expresión (3) sería una de las formas más simples de realizar una integración de preferencias multi-criterio. Sin embargo, considerarlos como números de intervalo es esencial para reflejar la imprecisión inevitable asociada con esas magnitudes.

Si V es una función de valor que expresa preferencias del DM, entonces $P(V(x) \geq V(y)) \geq \alpha \geq 0.5$ define una relación de preferencia débil de x sobre el objeto y , que se lee x es *al menos tan bueno como* y . Esa relación de preferencia puede utilizarse para comparar objetos que deben ser clasificados contra objetos representativos de las clases. Denotaremos como $x \geq y$ a esa relación.

Si α es estrictamente mayor que 0.5, $P(V(x) \geq V(y)) \geq \alpha$ define una relación de preferencia asimétrica (preferencia estricta) a favor del objeto x sobre y . Denotaremos $x > y$ a tal relación.

5. El método de asignación a categorías

5.1 Caracterización del conjunto de referencia

Sea $\alpha > 0.5$ un umbral de credibilidad asignado por el DM. Cada elemento C_k perteneciente al conjunto de categorías C se caracteriza por un conjunto finito R_k , con cardinal $\text{card}(R_k)$, de objetos representativos de esa clase $r_{k,j}$, $j=1, \dots, \text{card}(R_k)$, que cumplen:

- Para $k=1, \dots, M-1$, por cada w en R_k , existe al menos un objeto z en R_{k+1} tal que $z > w$;
- Para $k=1, \dots, M-1$, por cada w en R_{k+1} , existe al menos un z en R_k tal que $w > z$;
- Para todo par (k, h) ($h > k$) ($k=1, \dots, M-1$), por cada objeto w en R_h , no existe objeto z en R_k tal que $z \geq w$.

El conjunto $R = \{ r_{k,j}, j=1, \dots, \text{card}(R_k), k=1, \dots, M \}$ se denomina conjunto de referencia.

Definición 1. (Relación de preferencia débil entre objetos y categorías)

- $x \geq R_k$ si y sólo si existe z perteneciente a R_k tal que $x \geq z$;
- $R_k \geq x$ si y sólo si existe w perteneciente a R_k tal que $w \geq x$.

Observación 1:

- Note que $x \geq R_k$ es una razón para clasificar a x en una categoría igual o superior a C_k . De igual modo, $R_k \geq x$ sugiere que el objeto sea clasificado en una categoría igual o inferior a C_k .
- Los enunciados de preferencia débil $x \geq R_k$ y $R_k \geq x$ contienen información de similar nivel. No hay razones para dar prioridad a ninguno de ellos.

- 3) De la Definición 1 y del concepto de la relación de preferencia débil entre objetos, es obvio que si z es elemento de R_k , se cumple que $z \geq R_k$ y $R_k \geq z$.

Observación 2:

Bajo las condiciones que debe satisfacer el conjunto de referencia, es fácil probar que:

- 1) $x \geq R_k \Rightarrow x \geq R_h$ para todo $h < k$;
- 2) $R_k \geq x \Rightarrow R_h \geq x$ para todo $h > k$.

La demostración es consecuencia de la Definición 1 y de las condiciones a) y b) enunciadas para el conjunto de referencia.

5.2 Reglas de clasificación

De Observación 1.1 se infieren dos reglas posibles de clasificación, basadas respectivamente en $x \geq R_k$ y $R_k \geq x$. Ellas son:

Definición 2 (Regla descendente)

Para todo x , tomamos como cierto el enunciado $x \geq R_0$.

- i. Para $k = M, \dots, 0$, determine el primer R_k tal que $x \geq R_k$;
- ii. Si $k = M$, clasifique x en C_M ;
- iii. Si $k=0$, clasifique x en C_1 ;
- iv. Para $0 < k < M$, considere C_k como posible clasificación de x .

Definición 3 (Regla ascendente)

Para todo x , tomamos como cierto el enunciado $R_{M+1} \geq x$.

- i. Para $k = 1, \dots, M+1$ determine el primer R_k tal que $R_k \geq x$;
- ii. Si $k = 1$, clasifique x en C_1 ;
- iii. Si $k = M+1$, clasifique x en C_M ;
- iv. Para $1 < k < M+1$, considere C_k como posible clasificación de x .

De Observación 1.2 y de su simetría respecto a la operación de transposición, se infiere que ambas reglas deben utilizarse conjuntamente. Pueden sugerir la clasificación en la misma o distintas categorías. En el segundo caso, el uso conjunto sugeriría un intervalo de categorías dentro del cual el DM debe seleccionar la clase que considere más apropiada.

Observación 3:

- 1) Utilizando la Observación 1.3 y la tercera condición (c) sobre el conjunto de referencia, es fácil probar que ambas reglas de decisión cumplen la propiedad de Conformidad; es decir, si z es elemento de R_k , (o suficientemente similar a un objeto de R_k), entonces z se clasifica en C_k .
- 2) Por la transitividad de la relación de orden basada en la función Posibilidad, se puede demostrar que para todo par de objetos (x,z) tales que $x>z$, si z se clasifica en C_k entonces x se clasifica en C_h con $h \geq k$ (una categoría por lo menos tan deseable como C_k). Esta propiedad es análoga a la de Monotonía exigida por Roy y Bouyssou (1993).

6. Discusión

El método de la Sección 5, con los modelos de preferencias explicados en la Sección 4, permite construir una herramienta para facilitar, incluso automatizar, las decisiones de clasificación en categorías evaluativas. Semejante *máquina de decisión* sólo tendría sentido en alguna de las siguientes situaciones:

- i) Si se deseara evaluar numerosos objetos (por ejemplo, la capacidad de sobrevivencia de muchas micro y pequeñas empresas que responden a una encuesta) ;
- ii) Si la evaluación de unos pocos fuera tan compleja como para constituir una tarea ardua que requiriese el apoyo a la decisión; o
- iii) En caso de ausencia del DM real.

La construcción del “evaluador multicriterio” requiere los siguientes pasos:

Primero: Determinar el conjunto de atributos (indicadores) de interés, $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, cada uno de ellos expresando cierta dimensión evaluativa o punto de vista valorativo de los objetos a evaluar, y que en su integración determinan la evaluación del mismo.

Segundo: Determinar el conjunto de categorías de acuerdo con la propiedad que se desea evaluar y con la información que se dispone; por ejemplo $\{\text{Muy mala, Mala, Regular, Buena, Muy Buena}\}$ si se trata de una calidad, o $\{\text{Muy bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy Alto}\}$ si se trata de un impacto o una capacidad, etc.

Tercero: Determinar las escalas para medir los atributos; cuando sea posible deberá tomarse la opción más simple: emplear la misma escala.

Cuarto: Escoger el modelo de preferencias, que deberá ser una de las expresiones de la función de preferencia dada por (2) o (3). La última, que es la más simple, sólo es posible si los atributos se miden en la misma escala. Siempre se puede lograr esto definiendo apropiadamente la escala o efectuando un proceso de normalización.

Quinto: Definir la ponderación de cada atributo, acorde con la importancia que el DM asigne a cada uno de ellos respecto a la propiedad objeto de evaluación.

Sexto: Crear el conjunto de referencia. El DM debe identificar al menos un objeto representante de cada categoría, cumpliendo los requerimientos establecidos en 5.1. Esos objetos deben ser descritos en términos de sus indicadores, los cuales pueden ser números de intervalo como en las expresiones (2) y (3).

Séptimo: Calcular y almacenar los valores de intervalo $V(z)$ para todo z perteneciente al conjunto de referencia.

Octavo: Aplicar las reglas de decisión ascendente y descendente para obtener la evaluación de cualquier objeto cuando ellas coinciden, o un rango de categorías cuando sugieren clasificaciones diferentes.

Observación 4:

- 1) Las preferencias del DM están dadas por la ponderación de los atributos y por los objetos incluidos como representantes de las diferentes categoría.
- 2) El conjunto de entrenamiento es un modo de representación de un tipo especial de conocimiento: el conocimiento preferencial. Para construirlo el DM puede emplear objetos fáciles de clasificar (por ejemplo, con todos sus atributos en un mismo nivel de calidad), o utilizar ejemplos de decisiones pasadas cuya clasificación él conoce o acepta. Incluso puede utilizar información real proveniente de la literatura o de investigación de campo, que justifique que ciertos objetos conocidos pertenecen a determinadas categorías. Como ilustración, suponga que el DM tiene acceso a la información de un grupo de PyMEs, algunas de las cuales han probado elevada capacidad de sobrevivir en condiciones adversas. Otras, por el contrario, demostraron insuficiente resiliencia. Con esa información, el DM puede seleccionar varias empresas que sean prototipos de las categorías que le interesa describir.
- 3) Mientras más copiosa sea la información en el conjunto de referencia será mejor la caracterización de las categorías, y más apropiadas las evaluaciones sugeridas por el método.

7. Conclusiones

El método que el artículo presenta permite construir una *máquina de evaluación multicriterio* utilizando un modelo de preferencias sencillo, que se basa en: i) reconocer la capacidad del decisor de evaluar los atributos (o indicadores) que, integrados, determinan la propiedad deseable del objeto; ii) reconocer su

capacidad para asignar factores de ponderación a los diferentes atributos; iii) admitir que, tanto la evaluación de los atributos como su ponderación, están sujetas a imprecisión o incertidumbre; iv) admitir que esa imprecisión es modelable a través de números de intervalo; v) requerir del decisor capacidad para asignar objetos prototipos de cada categoría. Estos objetos constituyen el conjunto de referencia; junto con la ponderación de los atributos, ellos recogen el conocimiento y las preferencias del decisor. Para asignar ponderación y objetos de referencia, el decisor puede apoyarse en la literatura, en información estadística existente, en investigación de campo, en opiniones de expertos, en sus propios juicios, o en una combinación de los elementos mencionados. La máquina de evaluación siempre contendrá elementos que provienen de la subjetividad del decisor, porque no es posible resolver problemas de decisión independientemente de preferencias, prioridades, sistemas de valores, creencias, del sujeto que lo encara. Pero el rol de la subjetividad puede reducirse a medida que se introduce mayor número de elementos que no dependen de la visión personal del decisor .

Una vez creada, la *máquina de evaluación* puede aplicarse para clasificar numerosos objetos, para reemplazar al decisor humano, o para evaluar casos aislados de especial dificultad.

Referencias

Almeida-Dias, J., Figueira, J., Roy, B. (2010). ELECTRE TRI-C: A multiple criteria sorting method based on characteristic reference actions. *European Journal of Operational Research*, 204: 565-580.

Almeida-Dias, J., Figueira, J. R., Roy, B. (2012). A multiple criteria sorting method where each category is characterized by several reference actions: The ELECTRE TRI-nC method. *European Journal of Operational Research*, 217: 567-579.

- Araz C, Ozkarahan, I. (2007). Supplier evaluation and management system for strategic sourcing based on a new multicriteria sorting procedure. *International Journal of Production Economics*, 106: 585-606.
- Belacel, N. (2000). Multicriteria assignment method PROAFTN: Methodology and medical applications. *European Journal of Operational Research*, 125: 175-183.
- Błaszczczyński, J, Greco, S, Słowiński, R. (2007). A new scheme for application of dominance-based decision rules. *European Journal of Operational Research*, 181: 1030-1044.
- Bouyssou, D., Marchant, T. (2015). On the relations between ELECTRE TRI-B and ELECTRE TRI-C and on a new variant of ELECTRE TRI-B. *European Journal of Operational Research*, 242: 201-211.
- Bouyssou, D, Marchant, T., and Pirlot, M. (2020). A theoretical look at ELECTRE TRI-nB <https://arxiv.org/abs/2008.09484>
- Bugdaci, A.G., Köksalan, M., Özpeynirci, S., Serin, Y. (2013). An interactive probabilistic approach to multi-criteria sorting. *IEE Transactions*, 45: 1048-1058.
- Dembczyński, K., Greco, S., Słowiński, R. (2009). Rough set approach to multiple criteria categoryfication with imprecise evaluations and assignments. *European Journal of Operational Research*, 198: 626-636.
- Doumpos, M., Zopounidis, C. (2002). *Multicriteria Decision Aid Classification Methods*, Kluwer Academic Publishers Dordrech-Boston-London, 2002.
- Fernandez, E., Navarro, J., Duarte, A. (2008). Multicriteria sorting using a valued preference closeness relation. *European Journal of Operational Research*, 185: 673-686.
- Fernandez, E., Navarro, J., Bernal, S. (2009). Multicriteria sorting using a valued indifference relation under a preference disaggregation paradigm. *European Journal of Operational Research*, 198: 602-609.
- Fernandez, E., Navarro, J. (2011). A new approach to multi-criteria sorting based on fuzzy outranking relations: The THESEUS method. *European Journal of Operational Research*, 213: 405-413.

- Fernández, E., Figueira, J., Navarro, J., Roy, B. (2017). ELECTRE TRI-nB: A new multiple criteria ordinal classification method. *European Journal of Operational Research*, 263: 214-224.
- Fernández, E., Figueira, J., Navarro, J. (2019a). An indirect elicitation method for the parameters of the ELECTRE TRI-nB model using genetic algorithms. *Applied Soft Computing*, 77, 723-733. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.01.050>
- Fernández, E., Figueira, J., Navarro, J. (2019b). An interval extension of the outranking approach and its application to multiple-criteria ordinal classification. *Omega: The International Journal of Management Science*, 84: 189-198.
- Fernández, E., Figueira, J., Navarro, J. (2020). Interval-based extensions of two outranking methods for multi-criteria ordinal classification. *Omega: The International Journal of Management Science*, 95, 102065 .
<https://doi.org/10.1016/j.omega.2019.05.001>
- Figueira, J.R., Greco, S., Roy, B., Słowiński, R. (2013). *An overview of ELECTRE methods and their recent extensions*. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 20: 61-85.
- Greco, S., Matarazzo, B., Słowiński, R. (2001). Rough sets theory for multicriteria decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 129: 1-47.
- Ishizaka A, Nemery P, Pearman C. (2012). AHPSort: an AHP based method for sorting problems. *International Journal of Production Research*, 50: 4767-84.
- Ishizaka, A., Nemery, P- (2014). Assigning machines to incomparable maintenance strategies with ELECTRE-SORT, *Omega* 47 : 45-59.
- Jacquet-Lagrèze, E. (1995): An application of the UTA discriminant model for the evaluation of R&D projects. In Pardalos, P.M. Siskos, Y., Zopounidis, C.(eds.) *Advances in Multicriteria Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. pp. 203-211.
- Kadziński, M., Tervonen, T. Figueira, J.R. (2015). Robust multi-criteria sorting with the outranking preference model and characteristic profiles. *Omega, The International Journal of Management Sciences*, 55: 126-140.

- Kelleher, J.D., MacNamee, B., D'Arcy, A. (2015). *Fundamentals of Machine Learning for predictive data analytics*. The MIT Press, Cambridge-London.
- Köksalan, M., Ulu, C. (2003). An interactive approach for placing alternatives in preference categories. *European Journal of Operational Research*, 144: 429-439.
- Köksalan, M., Özpeynirci, S.B.(2009). An interactive sorting method for additive utility functions. *Computers & Operations Research*, 36: 2565-2572.
- Köksalan, M., Mousseau, V., Özpeynirci, O., Özpeynirci, S.B.(2009). A new outranking- based approach for assigning alternatives to ordered classes. *Naval Research Logistics* 56: 74–85.
- Massaglia, R., Ostanello, A. (1991). N-TOMIC: A support system for multicriteria segmentation problems. In: Korhonen, P., Lewandowski, A., and Wallenius, J. (Eds.). *Multiple Criteria Decision Support*. LNEMS, Volume 356, Springer-Verlag, Berlin, Germany, pp. 167-174.
- Miller, G.A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review* 63 (2): 81-97. <https://doi.org/10.1037/h0043158>
- Moore, R.E. (1979). Methods and applications of interval analysis. *Studies in Applied and Numerical Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1979. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970906>
- Nemery P, Lamboray C. (2008), FlowSort: a flow-based sorting method with limiting or central profiles. *TOP*,16: 90-113.
- Perny, P. (1998). Multicriteria filtering methods based on concordance and non-discordance principles. *Annals of Operations Research*, 80: 137-165.
- Roy, B., Bouyssou, D. (1993). *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*. Economica, Paris, France.
- Shi, J. R., Liu, S. Y., Xiong, W. T. (2005). A new solution for interval number linear programming. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 2: 101-106.
- Tervonen, T., Figueira, J., Lahdelma, R., Almeida Dias, J., and Salminen, P. (2009). A stochastic method for robustness analysis in sorting problems. *European Journal of Operational Research*, 192: 236-242.

Yu, W. (1992). ELECTRE TRI: Aspects méthodologiques et manuel d'utilisation. Document du LAMSADE N° 74, Université Paris-Dauphine, Paris, France.

Zopounidis, C., Doumpos, M. (2000). Building additive utilities for multi-group hierarchical discrimination : The M.H.DIS method. *Optimization methods and Software* 14 : 219-240.